

成人高考专升本高等数学考试模拟题一

一、选择题(1~10小题，每小题4分。共40分。在每小题给出的四个选项中。只有一项是符合题目要求的)

1、 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$, 则 $f'(1) =$ ()

A、 $-\frac{1}{6}$

B、 $\frac{5}{6}$

C、 $-\frac{5}{6}$

D、 $\frac{1}{6}$

答案: B

解析: 【考点点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{3}{2}}$,

所以 $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$,

故 $f'(1) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$.

2、 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 是 ()

A、 奇函数

B、 偶函数

C、 非奇非偶函数

D、 周期函数

答案: A

解析: 【考点点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 记 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$,

则 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \xrightarrow{t=-u} \int_0^x f(-u)(-du)$ (因

$f(x)$ 为偶函数, 故 $f(x) = f(-x)$)

$= -\int_0^x f(u)du = -F(x)$,

所以 $F(x)$ 是奇函数.

3、 $\int_1^e x \ln x dx =$ ()

A、 0

B、 $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$

C、 $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$

D、 $e^2 - 1$

答案: B

解析: 【考点点拨】 本题考查了分部积分法的知识点.

【应试指导】 $\int_1^e x \ln x dx$

$= \frac{1}{2} \int_1^e \ln x dx^2$

$= \frac{1}{2} \left(x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \right)$

$= \frac{1}{2} \left(e^2 - \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^e \right) = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$

4、函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \leq x < 1, \\ 2x, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ 的连续区间是 ()

- A、 $[0, 1) \cup (1, 3]$
- B、 $[1, 3]$
- C、 $[0, 1)$
- D、 $[0, 3]$

答案：A

解析：【考情点拨】本题考查了函数的连续性的知识点。

【应试指导】因 $x=1$ 处 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ ，
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2$ ，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，因此 $f(x)$ 的连续区间为 $[0, 1) \cup (1, 3]$

5、设 $z=xy$ ，则 $dz=()$

- A、 $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$
- B、 $x^{y-1}dx + ydy$
- C、 $x^y(dx + dy)$
- D、 $x^y(xdx + ydy)$

答案：A

解析：【考情点拨】本题考查了二元函数的全微分的知识点。

【应试指导】由 $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$ ，所以
 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy$ ，故选 A。

6、函数 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 在区间 $(-1, 1)$ 内 ()

- A、单调减少
- B、单调增加
- C、不增不减
- D、有增有减

答案：D

解析：【考情点拨】本题考查了函数的单调性的知识点。

【应试指导】因为 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ，所以 $y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ，令 $y' = 0$ ，得 $x = 0$ ；当 $x > 0$ 时， $y' > 0$ ；当 $x < 0$ 时， $y' < 0$ ，故在 $(-1, 1)$ 内，函数有增有减。

7、把两封信随机地投入标号为1，2，3，4的4个邮筒中，则1，2号邮筒各有一封信的概率等于

- A、 $\frac{1}{16}$
- B、 $\frac{1}{12}$
- C、 $\frac{1}{8}$
- D、 $\frac{1}{4}$

答案：C

解析：

8、函数 $y=a^2+c$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加，则 a, c 应满足 ()

- A、 $a < 0$ 且 $c=0$
- B、 $a > 0$ 且 c 是任意常数
- C、 $a < 0$ 且 $c \neq 0$
- D、 $a < 0$ 且 c 是任意常数

答案: B

解析: 【考情点拨】本题考查了函数的单调增加性的知识点.

【应试指导】由 $y' = 2ax$, 若 y 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加, 则应有 $y' > 0$, 即 $a > 0$, 且对 c 没有其他要求, 故选 B.

9、曲线 $y = 2 + (x-4)^{\frac{1}{3}}$ 的拐点为 ()

- A、(4, 2)
B、x=4
C、y=2
D、(2, 4)

答案: A

解析: 【考情点拨】本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】

$y = 2 + (x-4)^{\frac{1}{3}}, y' = \frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}}, y'' = -\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}$, 函数在 $x=4$ 处连续, 当 $x < 4$ 时, $y'' > 0$; 当 $x > 4$ 时, $y'' < 0$, 所以点(4, 2)为曲线的拐点.

10、已知函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{4}$, 则 $f'(x_0)$ 等于 ()

- A、-4
B、-2
C、2
D、4

答案: B

解析: 【考情点拨】本题考查了利用定义求函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】因 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{4}$,
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{-2f'(x_0)} = \frac{1}{4}$,
于是 $f'(x_0) = -2$.

二、填空题(11~20小题, 每小题4分, 共40分)

11、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x + 2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【考情点拨】本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{3}$.

12、 $\int e^x(1 + e^x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$

13、 $\int e^{2x^2 + \ln x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{4}e^{2x^2} + C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int e^{2x^2 + \ln x} dx = \int e^{2x^2} e^{\ln x} dx$
 $= \int e^{2x^2} x dx$
 $= \frac{1}{4} \int e^{2x^2} d2x^2$
 $= \frac{1}{4} e^{2x^2} + C$.

14、设 $z = \arctan \sqrt{\frac{y}{x}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{2(x+y)}\sqrt{\frac{y}{x}}$

【考点点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$
 $= -\frac{1}{2(x+y)}\sqrt{\frac{y}{x}}.$

15、设 $y = x^2 \cos x + 2^x + e$, 则 $y' =$ _____.

【答案】 $2x \cos x - x^2 \sin x + 2^x \ln 2$

【考点点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $(x^2 \cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x,$
 $(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2, e' = 0,$
 所以 $y' = 2x \cos x - x^2 \sin x + 2^x \ln 2.$

16、设 $z = \sqrt{x(x+y^2)}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

【答案】 $\frac{xy}{\sqrt{x(x+y^2)}}$

【考点点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+y^2)}} \cdot x \cdot 2y = \frac{xy}{\sqrt{x(x+y^2)}}.$

17、设 $f(x)$ 是 $[-2, 2]$ 上的偶函数, 且 $f'(-1)=3$, 则 $f'(1)=$ _____.

【答案】 -3

【考点点拨】 本题考查了函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(x)$ 是偶函数, 故 $f'(x)$ 是奇函数, 所以 $f'(-1) = -f'(1),$
 即 $f'(1) = -f'(-1) = -3.$

18、 $\int (\sqrt{x}-1)\left(1+\frac{1}{x}\right)dx =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + 2x^{\frac{1}{2}} - \ln|x| + C$

【考点点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int (\sqrt{x}-1)\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$
 $= \int (x^{\frac{1}{2}} - 1 + x^{-\frac{1}{2}} - x^{-1})dx$
 $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + 2x^{\frac{1}{2}} - \ln|x| + C.$

19、曲线 $Y=x^3-3x^2+2x+1$ 的拐点是_____.

(1, 1)

【应试指导】 $y' = 3x^2 - 6x + 2, y'' = 6x - 6,$ 令 $y'' = 0,$ 得 $x = 1.$ 则当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$; 当 $x < 1$ 时, $y'' < 0.$ 又因 $x=1$ 时 $y=1$, 故点 $(1,1)$ 是拐点(因 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处有二阶导数, 故没有其他形式的拐点).

20、设 $z = \ln(x^2 + y^2)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

【答案】 2

【考点点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】
 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$
 所以 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = 2.$

三、解答题(21~28题, 共70分. 解答应写出推理、演算步骤)

21、(本题满分8分)

计算 $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx.$

$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} de^x = \int \frac{e^x + 1 - 1}{1+e^x} de^x$
 $= \int \left(1 - \frac{1}{1+e^x}\right) de^x$
 $= e^x - \ln(1+e^x) + C.$

另解, 令 $e^x = t,$ 则 $x = \ln t, dx = \frac{1}{t} dt,$
 $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{t^2}{(1+t)t} dt = \int \frac{t}{1+t} dt$
 $= \int \frac{t+1-1}{1+t} dt$
 $= \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$
 $= t - \ln(1+t) + C$
 $= e^x - \ln(1+e^x) + C.$

22、(本题满分8分)

$$\text{求} \int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{2+3\tan x}} dx.$$

$$\text{因} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \sec^2 x dx = d\tan x,$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{2+3\tan x}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2+3\tan x}} d\tan x \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{2+3\tan x}} d(2+3\tan x) \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{2+3\tan x} + C. \end{aligned}$$

23、(本题满分8分)

设 $z = f(u)$, $u = xy + \frac{y}{x}$, f 是可微函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \cdot \left(y - \frac{y}{x^2}\right), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

24、(本题满分8分)

$$\text{计算} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \sqrt{1-x^2})}{(1 - \sqrt{1-x^2})(1 + \sqrt{1-x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \sqrt{1-x^2})}{x^2} \\ &= 2. \end{aligned}$$

注: 本题也可用洛必达法则求解.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2} = 2.$$

本题还可用变量代换求解如下: 令 $\sqrt{1-x^2} = t$.

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1-t^2}{1-t} = \lim_{t \rightarrow 1} (1+t) = 2.$$

25、(本题满分10分)

$$\text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t e^t \sin t dt}{x^6}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t e^t \sin t dt}{x^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 e^{x^2} \sin x^2 \cdot 2x}{6x^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} \sin x^2}{6x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \cdot x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

26、(本题满分8分)

$$\text{计算} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (\text{被积函数为偶函数}) \\ &= -2 \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x d\sqrt{1-x^2} \\ &= -2(\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} d\arcsin x \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{6} \pi + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{6} \pi + 1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \pi. \end{aligned}$$

27、(本题满分10分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt - \int_x^b \frac{1}{f(t)} dt$.

证明:

(1) $F'(x) > 0$;

(2) $F'(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 内有唯一实根.

$$(1) \text{ 由题知 } F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)},$$

$$\text{因 } f(x) > 0, \text{ 所以 } f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0,$$

故 $F'(x) > 0$.

(2) 由 $F'(x) > 0$, 知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加, 故 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 中最多有一个零点, 即方程 $F(x) = 0$ 最多有一个实根.

$$\text{又因 } F(a) = -\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt < 0, F(b) = \int_a^b f(t) dt > 0$$

故由零点定理知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 内至少有一个零点, 即至少有一个 $\xi \in [a, b]$ 使得 $F(\xi) = 0$, 这也说明方程 $F(\xi) = 0$ 在 $[a, b]$ 内至少有一个实根. 综上所述, $F(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 内有唯一实根.



28、(本题满分8分)

$$\text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin t^2}{t} dt}{x^2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin t^2}{t} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x^2}{2x}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

